Série 2 des Travaux Dirigés

Introduction aux calculs des probabilités

1. Ensemble fondamental

Q1.1. Soient A et B deux événements élémentaires. Donner une expression et représenter le diagramme de Venn de l'événement : (i) A est réalisé mais non B, c.à.d. que seulement A se réalise ; (ii) soit A, soit B, se réalise, mais pas les deux en même temps; c.à.d. qu'exactement un seul des deux événements se produit.

Q1.2. On jette en l'air une pièce de monnaie et un dé, et l'on suppose que l'ensemble fondamental S se compose des 12 éléments : $S = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$.

(i) Exprimer d'une façon explicite les événements suivants : A ={face et un nombre pair apparaissent}, B = {un nombre premier apparaît}, C ={pile et un nombre impair apparaissent}.

(ii) Exprimer d'une façon explicite l'événement : (a) A ou B est réalisé, (b) B et C est réalisé, (c) B seulement est réalisé.

(iii) Lesquels des événements A, B et C s'excluent mutuellement.

Q1.3. On suppose qu'un ensemble fondamental S est formé de 4 éléments : $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Laquelle des fonctions suivantes définit une probabilité sur Ω ?

(i) $P(a_1) = \frac{1}{2}$, $P(a_2) = \frac{1}{2}$, $P(a_3) = \frac{1}{4}$, $P(a_4) = \frac{1}{5}$

(ii) $P(a_1) = \frac{1}{2}$, $P(a_2) = \frac{1}{4}$, $P(a_3) = -\frac{1}{4}$, $P(a_4) = \frac{1}{2}$

(iii) $P(a_1) = \frac{1}{2}$, $P(a_2) = \frac{1}{4}$, $P(a_3) = \frac{1}{8}$, $P(a_4) = \frac{1}{8}$

(iv) $P(a_1) = \frac{1}{2}$, $P(a_2) = \frac{1}{4}$, $P(a_3) = \frac{1}{4}$, $P(a_4) = 0$

Q1.4. On suppose qu'un ensemble fondamental S est formé de 4 éléments : $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Et soit P une probabilité sur Ω

(i) Calculer $P(a_1)$ en supposant que , $P(a_2) = \frac{1}{3}$, $P(a_3) = \frac{1}{6}$, $P(a_4) = \frac{1}{9}$

(ii) Calculer $P(a_1)$ et $P(a_2)$ en supposant que, $P(a_3) = P(a_4) = \frac{1}{4}$, et $P(a_1) = 2P(a_2)$

(iii) Calculer $P(a_1)$ en supposant que , $P(\{a_2, a_3\}) = \frac{2}{3}$, $P(\{a_2, a_4\}) = \frac{1}{4}$, $P(a_2) = \frac{1}{3}$

2. Situation d'équiprobabilité

Q2.1. Calculer la probabilité p de chacun des événements suivants :

(i) Un nombre pair apparaît quand on jette un dé bien équilibré

(ii) Pile apparaît au moins une fois quand on jette trois pièces de monnaie bien équilibrées

(iii) On obtient une bille blanche en tirant une seule bille dans une urne contenant 4 billes blanches, 3 billes rouges et 2 billes bleues.

Q2.2. On prend au hasard trois ampoules électriques d'un lot de 15 ampoules dont 5 sont défectueuses. Calculer la probabilité p pour que (i) aucune ampoule ne soit défectueuse, (ii) exactement une ampoule soit défectueuse, (iii) au moins une ampoule soit défectueuse.

Q2.3. On choisit deux cartes .au hasard parmi 10 cartes numérotées de 1 à 10. Calculer la probabilité p pour que la somme des deux cartes tirées soit impaire, sachant que (i) on tire les deux cartes ensemble, (ii) on fait un tirage exhaustif des deux cartes l'une après l'autre, (iii) on fait un tirage non exhaustif des deux cartes l'une après l'autre.

Q2.4. Six couples mariés se trouvent dans une pièce.

(i) On choisit deux personnes au hasard. Calculer la probabilité p pour que (a) ces personnes soient mariées, (b) l'une d'elles soit un homme et l'autre soit une femme.

(ii) On choisit 4 personnes au hasard. Calculer la probabilité p pour que (a) l'on ait choisi 2 couples de personnes mariées, (b) l'on n'ait aucun couple parmi les 4 personnes. choisies, (c) l'on ait exactement un couple parmi ces 4 personnes.

(iii) On répartit les 12 personnes en six groupes de 2 personnes. Calculer la probabilité pour que (a) chaque groupe constitue un couple marié, (b) chaque groupe comprenne un homme et une femme.

3. Probabilité conditionnelle et indépendance

Q3.1. On jette une paire de dés bien équilibrés. Calculer la probabilité p pour que la somme obtenue soit supérieure ou égale à 10, sachant que (i) le premier dé a donné 5, (ii) au moins l'un des dés a donné 5.

Q3.2. On jette trois pièces de monnaie bien équilibrées. Calculer la probabilité p pour que toutes les trois donnent face, sachant que (i) la première pièce donne face à priori, (ii) l'une des pièces donne face à priori.

Q3.3. On considère deux évènements A et B tels que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Calculer : $P(A/B)$, $P(B/A)$, $P(A \cup B)$, $P(CA/CB)$, $P(CB/CA)$.

Q3.4. On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 3/8$, $P(B) = 5/8$ et $P(AUB) = 3/4$. Calculer $P(A/B)$ et $P(B/A)$

4. Probabilités totales et formule de Bayes

Q4.1. Trois machines A, B et C produisent respectivement 60 %, 30 % et 10 % du nombre total de pièces fabriquées dans une usine. Les pourcentages de résultats défectueux de ces machines sont respectivement 2 %, 3 % et 4 %. On choisit une pièce au hasard et on s'aperçoit qu'elle est défectueuse. Calculer la probabilité pour que cette pièce ait été produite par la machine C.